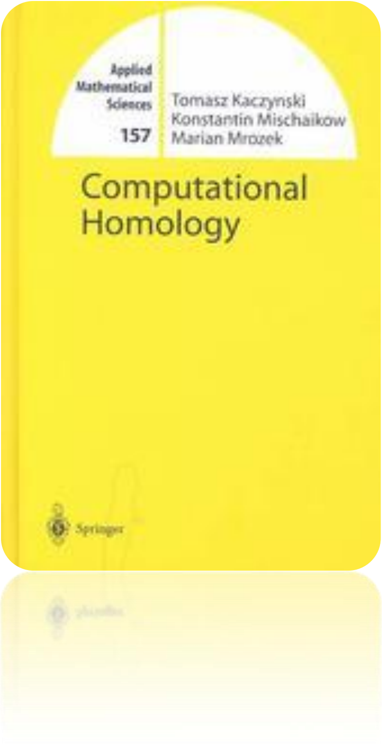
Homología Cúbica: Algoritmos para el cálculo de la aplicación inducida por una función continua.

Autor: Ezequiel Quintero
Tutor: Eduardo Sánchez

Contenidos

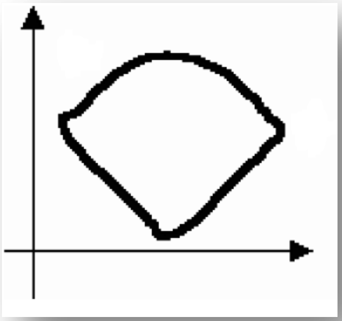
- Introducción y motivación.
- Implementación.
- Ejemplos.
- Conclusiones.

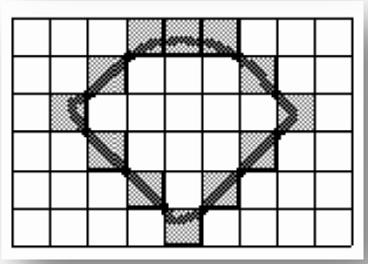
2003

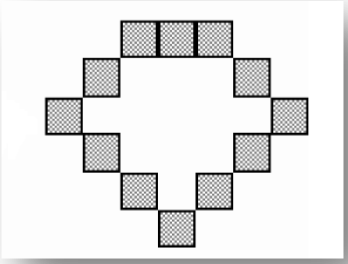


Introducción

- ¿Qué es la Homología?
- ¿Cómo se define?
- ¿Por qué *Homología Cúbica*?
  - Representación
  - Aplicaciones







Motivación

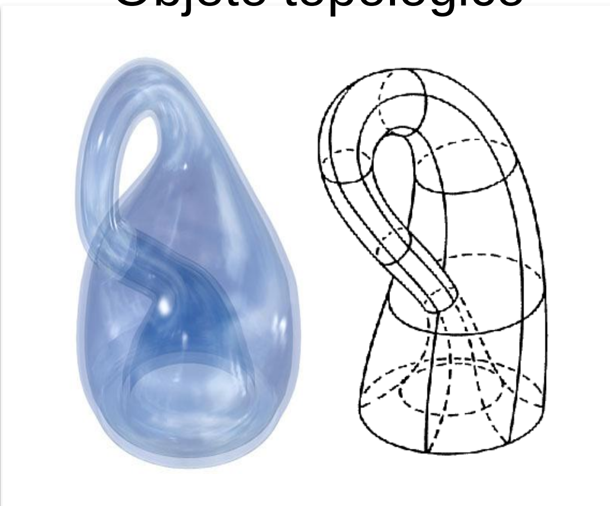
- Continuación del proyecto *Homología en complejos de cadenas: algoritmos y aplicaciones.*
  - Computación de grupos de homología de complejo de cadenas en abstracto.
  - Automatización de formas escalonadas y formas normales de Smith.
  - Caracterización de grupos abelianos.

- Punto de partida de este trabajo
  - Refinar la implementación del trabajo anterior vs continuar diseñando.
  - Terminar una vuelta al ciclo completo de implementación del objetivo global de los dos trabajos.
  - Objetivo: Concluir la computación de la homología de cualquier conjunto cúbico e implementar el cálculo de homomorfismos inducidos por cadenas.

Ejemplo de homología

k-ésimo grupo de homología de la botella de Klein

Objeto topólogico



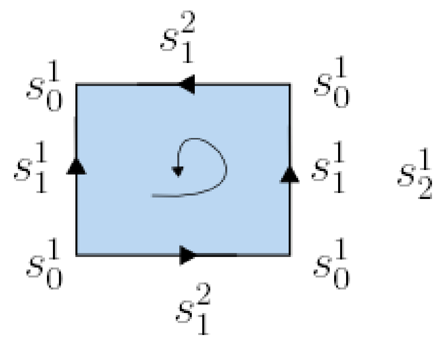
Representación simplicial

$$s_2^1 = -s_1^1 + s_1^2 + s_1^1 + s_1^2 = 2s_2^1$$

$$s_1^1 = 0$$

$$s_1^2 = 0$$

$$s_0^1 = 0$$



Homología

$$H_0 \cong \mathbb{Z}$$

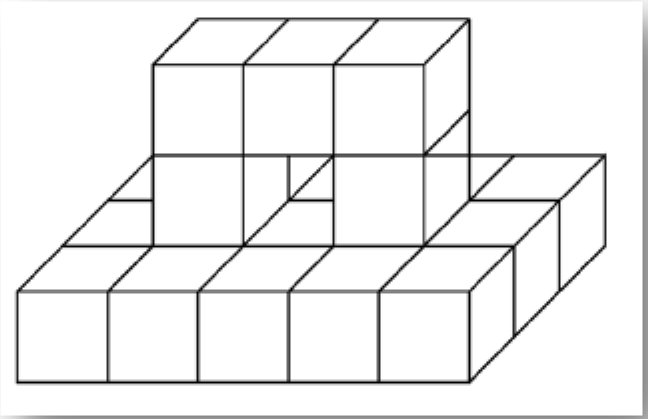
$$H_1 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$$

$$H_2 = 0$$

- Conexo.
- Dos 1-ciclos no triviales independientes (uno con torsión) y un agujero unidimensional.
- No encierra agujeros bidimensionales.

  No orientable

Homología cúbica
Conjuntos cúbicos



- Cubos elementales
  - Intervalos
- Conjuntos cúbicos
  - Objetos geométricos formados por cubos
- Álgebra
  - Objeto algebraico

$$Q \longrightarrow \hat{Q}$$

  - Conjunto de k-cadenas

$$c = \alpha_1 \hat{Q}_1 + \cdots + \alpha_m \hat{Q}_m \quad \Rightarrow \quad C_k^d$$

$$C_k(X) : \ \ \mathit{conjunto\ de\ k\text{-}cadenas\ de\ X}$$

Homología cúbica

Complejos de cadenas abstractos

- Operador frontera

$$\partial_k : C_k^d \to C_{k-1}^d \qquad \partial_{k-1}\partial_k = 0$$

  - Complejos de cadenas cúbicas

$$\mathcal{C}(X) := \{C_k(X), \partial_k^X\}$$

  - Homología de complejos cúbicos

$$H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X) \qquad B_k \subset Z_k$$

    - K-ciclos de X

$$Z_k(X) = \ker(\partial_k^X)$$

    - K-bordes de X

$$B_k(X) = \mathrm{im}(\partial_{k+1}^X)$$

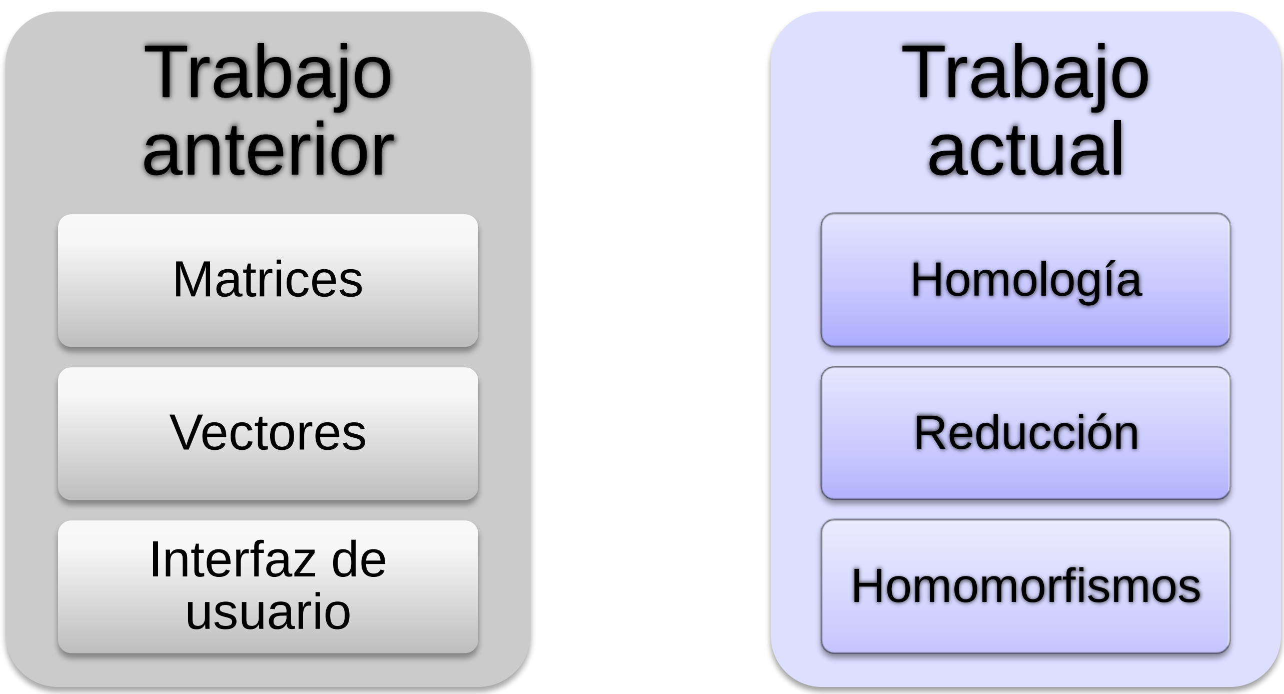
- Homología abstracta

Implementación

- Cálculo de homología de conjuntos cúbicos.
- Algoritmos de reducción.
- Cálculo del homomorfismo inducido por una aplicación continua.

Detalles de implementación

- Lenguaje de Programación: C
  - Aprovechamiento del código anterior sin migrar.
- Bloques



Homología de conjuntos cúbicos (I)

- Cadenas y coordenadas canónicas
  - Cadenas: Hash ⟷ Vectorial.
- Grupos de cadenas cúbicas
  - Descomposición de conjuntos cúbicos.
- Operadores frontera
  - Matriz del mapa frontera.
- Generadores de homología
  - Cadenas en representación coordenada → Cadenas concretas.

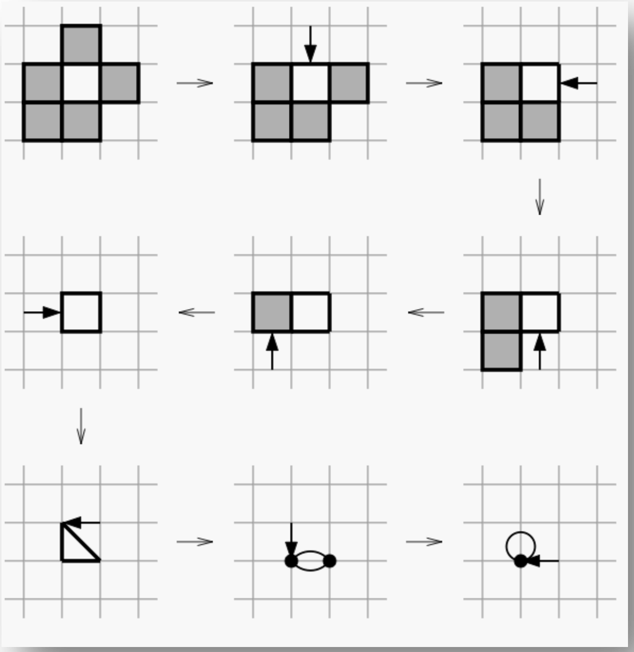
Homología de conjuntos cúbicos (II)

- El algoritmo que calcula la homología de un conjunto cúbico, es el siguiente:

```
GENORS_ARRAY homology(CUBSET K){
  E = cubicalChainGroups (K);
  D = boundaryOperatorMatrix (E);
  Haux = homologyGroupOfChainComplex (D);
  HG = generatorOfHomology (Haux, E);
}
```

Algoritmos de reducción

- Motivación
  - Complejos de cadenas grandes.
  - Memoria.
  - Tiempo.



- Idea: generalización de colapsos elementales.

- Algoritmos de Reducción
  - Reducción de un par de generadores.
  - Reducción de un complejo de cadenas.

Homomorfismos inducidos por una aplicación continua (I)

- Representación multivaluada
  - Funciones racionales $\longrightarrow$ Representación cúbica.
- Selección de cadenas
  - Rep. multivaluada $\longrightarrow$ Morfirmos de cadenas.
- Homomorfismo inducido
  - Construcción del mapa de homología.
  - Corrección y adaptación del algoritmo.

Homomorfismos inducidos por una aplicación continua (II)

- El pseudocódigo es el siguiente:

```
void homologyOfMap
(CUBSET X, CUBSET Y, RATIONALMAP f){
  HX = homology (X)
  HY = homology(Y)
  HY2 = homologyAdaptedBasis (Y)

  F = multivaluedRepresentation(X, Y, f)
  phi = chainSelector (F)

  for k=1 to lastIndex (HX) do{
    C = HX[k]{generators}
    D = HY2[k]{generators}

    for i=1 to lasIndex (HY2) do{
      if (HY2[k].orders[i] == 1)
        n+=1
    }
```

```
    for i=1 to lastIndex (C){
      d = evaluate (phi, k, C[i])
      xi = coordinates (d, D)
      x2 = xi (from m = n+1 to lastIndex (xi))
      Hphi[k]{C[i]} = xi
    }
  }
  return (Hphi)
}
```

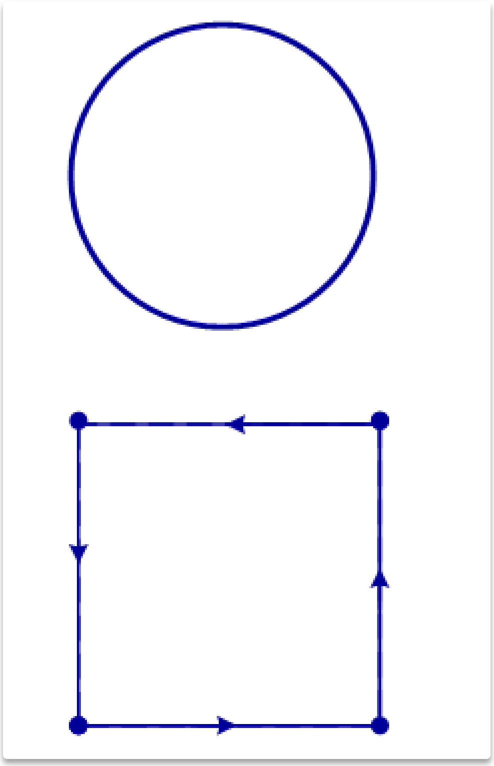
Cálculo de pre-fronteras

- Pre-fronteras
  - Trabajo anterior.
  - Ecuaciones diofánticas lineales.
  - Matrices muy grandes.
- Pre-fronteras cúbicas
  - Alternativa.
  - Consideraciones geométricas.
  - Funciona de forma iterativa.

Tiempos de Ejecución		
Dimensión	cuPreBoundary	preBoundary
1	0.00013seg	0.01574seg
2	0.00013seg	0.01955seg
3	0.00015seg	0.05252seg
4	0.00015seg	0.07442seg
5	0.00016seg	0.21136seg
6	0.00016seg	-

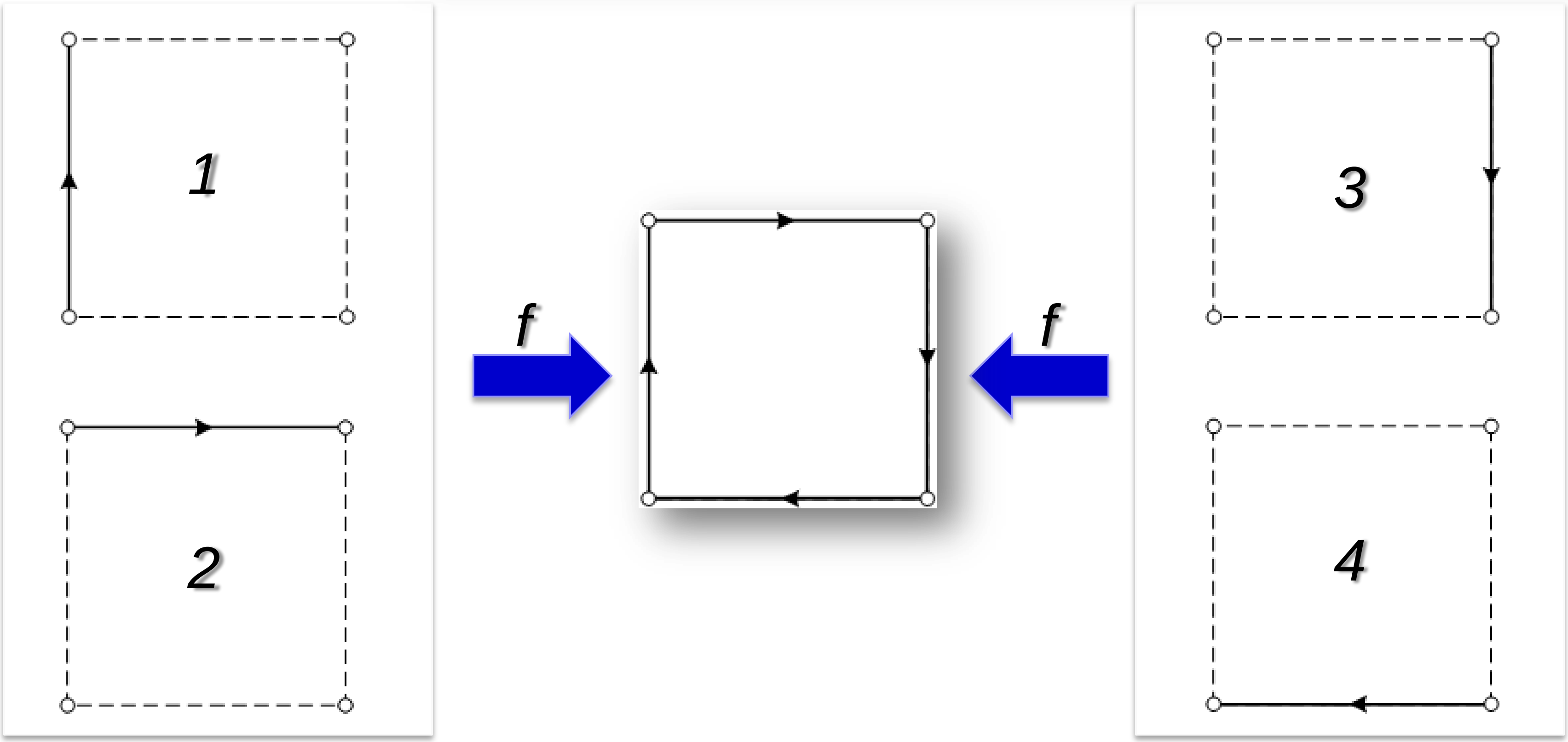
Ejemplos

- Objetivos
  - Resultados.
  - Ilustrar información geométrica.
- Complejidad
  - Sencillos.
  - Aplicación: círculo en el círculo.
  - Internamente: grandes dimensiones.
- Aplicaciones
  - Reconocimiento de caracteres e imágenes.



Ejemplo 1 (I)

- Círculo: cuadrado.
- Descripción combinatoria.
- Aristas: $X = Y = [0,0] \times [0,1] \cup [0,1] \times [1,1] \cup [1,1] \times [0,1] \cup [0,1] \times [0,0]$



Ejemplo 1 (II)

- Homología del círculo: dimensión 1.

- Salida
  - Dimensión 0: comprobación.
  - Dimensión 1: dos vueltas al círculo.

$$Hphi[0]\{[1,1]\times[0,0]\}=1$$

$$Hphi[1]\{-[0,0]\times[0,1]-[0,1]\times[1,1]+[1,1]\times[0,1]+[0,1]\times[0,0]\}=2$$

Ejemplo 2 (I)

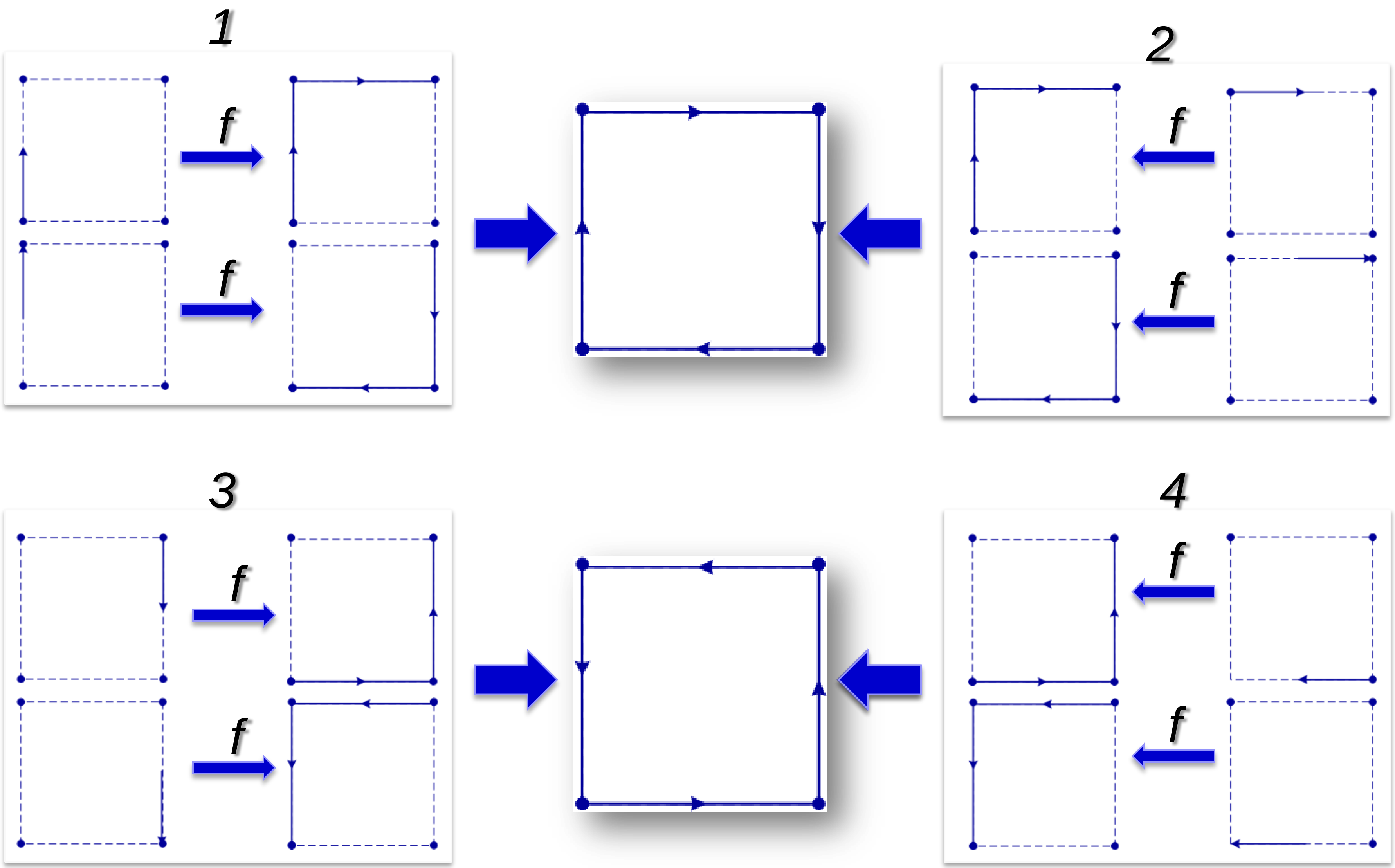
- Entrada
  - Círculo.
  - Subdivisión del espacio de partida.
  - Aumento de las dimensiones.

El espacio de partida es: $X = ([0,0] \times [0,1] \cup [0,0] \times [1,2] \cup [0,1] \times [2,2] \cup [1,2] \times [2,2] \cup [2,2] \times [0,1] \cup [2,2] \times [1,2] \cup [0,1] \times [0,0] \cup [1,2] \times [0,0])$

Y el espacio de llegada, el siguiente:

$$Y = [0,0] \times [0,1] \cup [0,1] \times [1,1] \cup [1,1] \times [0,1] \cup [0,1] \times [0,0]$$

Ejemplo 2 (II)



Ejemplo 2 (III)

- Salida
  - Dimensión 0: comprobación.
  - Dimensión 1: vueltas.

$$Hphi[0]\{[1,1]\times[0,0]\}=1$$

$$Hphi[1]\{-[0,0]\times[0,1]-[0,0]\times[1,2]-[0,1]\times[2,2]-[1,2]\times[2,2]+[2,2]\times[0,1]+[2,2]\times[1,2]+[0,1]\times[0,0]+[1,2]\times[0,0]\}=0$$

Conclusiones

- Homología de conjuntos cúbicos.
- Representación multivaluada de funciones.
- Evaluación de funciones racionales.
- Aritmética de intervalos.
- Gestión de polinomios.
- Pre-fronteras para topologías triviales.
- Homomorfismos inducidos.

Líneas futuras

- Pasos inmediatos
  - Cálculo de pre-fronteras en topologías arbitrarias.
  - Mejoras de implementación.
  - Hacer más modular e independiente.

- Líneas futuras
  - Computación de formas de cualquier dimensión.
  - Detección de patrones en imágenes.
  - Reconocimiento de objetos a partir de imágenes.
  - Recolección de información de sensores.
  - Contenidos topográficos y cartográficos.
  - Estudio de sistemas dinámicos.

Homología Cúbica: Algoritmos para el cálculo de la aplicación inducida por una función continua.

Autor: Ezequiel Quintero
Tutor: Eduardo Sánchez